ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ (ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ-ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ-ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ)

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$. Να αποδειχθεί ότι $-1=x^2\cdot f'(x)$, $\forall x\neq 0$
2. " " " " . Να αποδειχθεί ότι $x\cdot f'(x)=-f(x)$, $\forall x\neq 0$
3. " " " " " " " $x\cdot f''(x)+f'(x)=\frac{f(x)}{x}$, $\forall x\neq 0$
4. " " " $f(x)=x^3-2\kappa x^2+5x-2$. Αν $f'(1)=4$ να βρεθεί η τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$
5. " " " $f(x)=x^3-2\kappa x^2+5x+\mu$. Αν $f(1)=2$ και $f'(1)=4$ να βρεθούν οι τιμές των κ και μ
6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x\sqrt{x}-3x^2$, $x>0$. Να αποδειχθεί ότι:
$$f(4)-5f'(1)-4f''\left(\frac{9}{4}\right)=3$$
7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+2$. Να αποδειχθεί ότι: $f'(x)+f''(x)=2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$
8. " " " $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+2019$. " " " $\frac{f'(-2)+f''(2)}{2}=2$
9. " " " $f(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η θετική τιμή του κ, ώστε: $\kappa^2 f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\kappa f'(\pi)-2f''(\pi)=0$
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu 2x$. Να αποδειχθεί ότι $4f^2(x)+(f'(x))^2=4$
11. " " " " " " " " $f''(x)+4f(x)=0$
12. " " " $f(x)=(2x+\kappa)^6$, $\kappa\in\mathbb{R}$. Αν $f'(0)=12$ να βρεθεί η τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$
13. " " " $f(x)=2\eta\mu 3x-4\sigma\upsilon\nu 3x$. Να αποδείξετε ότι: $f''(x)+9f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$
14. " " " $f(x)=ax^3+x$, $a\in\mathbb{R}^*$. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού a, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=-1$ να είναι παρ/λη στην ευθεία $y=5+4x$
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}-x$
α. Να βρεθεί το D_f β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$
γ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$. ($y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=f'(-1)$ και σημείο επαφής της C_f και της (ε) είναι το $A(-1,0)$)
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+3x^2-x$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $x+y+4=0$
17. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=2x^2+1$ στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι η ευθεία $y=4x-1$.

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

15. α. Εύρεση του D_f : Πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

β. $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x-1}-x=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x-1}=x \Leftrightarrow x^2+1=x(x-1)$

$\Leftrightarrow x^2+1=x^2-x \Leftrightarrow -x=1 \Leftrightarrow x=-1$ δεκτή τιμή

γ. Η C_f τεμνει τον άξονα xx' άρα πρεπει $f(x)=0$. Απο το β ερωτημα εχουμε $x=-1$ Άρα σημειο τομης με τον xx' ειναι το $(-1,f(-1))$. Η εξισωση της εφαπτομένης στο σημειο $A(-1,f(-1))$ είναι της μορφής $y=\lambda x+b$ (ε) με $\lambda=f'(-1)$

Για κάθε $x\neq 1$ εχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)'=\frac{(x^2+1)'\cdot(x-1)-(x^2+1)(x-1)'}{(x-1)^2}-x'=$$

$$=\frac{(2x+0)(x-1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x-1)^2}-1=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}-1$$

$$=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}-1=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}-1$$

Άρα $f'(-1)=\frac{(-1)^2-2(-1)-1}{(-1-1)^2}-1=\frac{1+2-1}{4}-1=\frac{1}{2}-1=-1/2$

άρα $y=-\frac{1}{2}x+b$

Το σημειο επαφης της C_f και της (ε) ειναι το $A(-1,0)$ και

$$y=-\frac{1}{2}x+b \xrightarrow[y=0]{x=-1} -\frac{1}{2}\cdot(-1)+b=0 \Rightarrow b+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow b=-1/2$$

Τελικα (ε) : $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

16. Εστω $(x_0,f(x_0))$ το σημειο επαφής της C_f και της εφαπτομένης.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $(x_0,f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$

Για καθε $x\in\mathbb{R}$ εχουμε $f'(x)=(x^3+3x^2-x)'=3x^2+6x-1$

Αφου (ε)//(ε'): $x+y+4=0$ ισχύει $f'(x_0)=\lambda_{\varepsilon'}$

(ε') $y=-x-4 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon'}=-1$

$\Big\}\ f'(x_0)=-1$ (A)

Ομως $f'(x_0)=3x_0^2+6x_0-1 \xrightarrow{(A)} 3x_0^2+6x_0-1=-1 \Leftrightarrow 3x_0(x_0+2)=0 \Leftrightarrow$

$3x_0=0$ ή $x_0+2=0$

$x_0=0$ ή $x_0=-2$ Άρα τα σημεια επαφης της C_f και των εφαπτομενων ειναι το $O(0,f(0))$ και $A(-2,f(-2))$ και αφου $f(0)=0$ και $f(-2)=6$ εχουμε τα σημεια $O(0,0)$ και $A(-2,6)$

(συνέχεια λύσης Ασκ 16)

• Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) της C_f στο σημείο $O(0,0)$ είναι της μορφής : $y=\lambda x+b$ με $\lambda=f'(0)=-1$

αφού $O\in\varepsilon_1$ τότε $y=-x+b \xrightarrow[y=0]{x=0} 0=-0+b \Leftrightarrow b=0$

άρα ε_1 : $y=-x$

• Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε_2) της C_f στο σημείο $A(-2,6)$ είναι της μορφής : $y=\lambda x+b$ με $\lambda=f'(-2)=-1$

αφού $A\in\varepsilon_2$ τότε $y=-x+b \xrightarrow[y=6]{x=-2} 6=-(-2)+b \Rightarrow 6=2+b \Rightarrow b=4$

άρα ε_2 : $y=-x+4$

Τελικά οι ζητούμενες εξισώσεις είναι:

$\varepsilon_1 : y=-x$ και $\varepsilon_2 : y=-x+4$

17. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$ είναι της μορφής : $y=\lambda x+b$, όπου $\lambda=f'(1)$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x)=(2x^2+1)'=4x+0=4x$

Επομένως $f'(1)=4\cdot1=4$ άρα $\boxed{\lambda=4}$

και $\varepsilon: y=4x+b$

Το σημείο επαφής της C_f και της ε είναι το $A(1,f(1))$

με $f(1)=2\cdot1^2+1=2\cdot1+1=2+1=3$ άρα $A(1,3)$

Όμως $A\in\varepsilon$, οπότε ικανοποιεί την $y=4x+b \xrightarrow[y=3]{x=1} 3=4\cdot1+b$

$\Rightarrow 3=4+b \Leftrightarrow b=3-4 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι

(ε) : $y=4x-1$