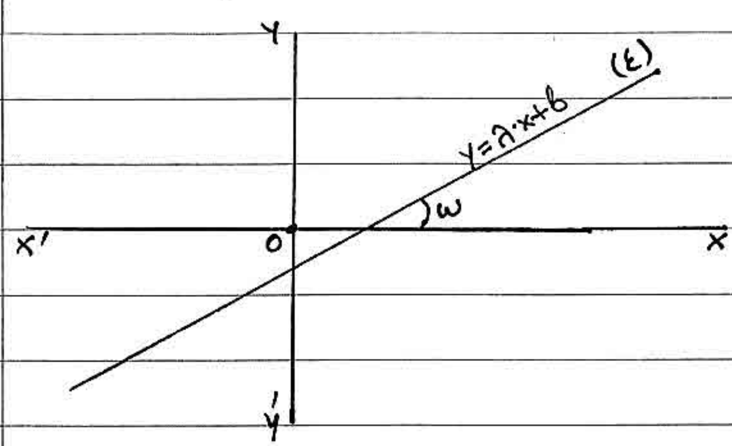
ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

$$y = \lambda \cdot x + b \quad , \lambda, b \in \mathbb{R}$$



λ = συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας
λ = εφω (ω είναι η οξεία γωνία που σχηματίζεται όταν η ευθεία (ε) τμήσει τον άξονα xx')

* Όταν πρόκειται για την **ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΤΗ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΜΕ ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ x_0** τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ισούται με $f'(x_0)$, και η εξίσωση της εφατομένης είναι:

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΣΤΗ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΑΣ f

- Αν έχω 2 ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις αντίστοιχα

(ε_1) $y = \lambda_1 \cdot x + b_1$

(ε_2) $y = \lambda_2 \cdot x + b_2$

ΤΟΤΕ: αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ τότε $\lambda_1 = \lambda_2$

" $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ " $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ και αντίστροφα

" $\lambda_1 = 0$ τότε η ευθεία ε_1 είναι παρ/λη στον xx'

** Αν σας δίνει μια συνάρτηση f και ζητάει το συντελεστή δ/νσης της εφαπτομένης στο σημείο πχ $x_0 = 1$ τότε - βρίσκετε το ΠΟ και $f'(x) = \cdots$ τέλος βρίσκετε την $f'(1) = \ldots$

** Κάθε σημείο του επιπέδου εκφράζεται με 2 συντεταγμένες $(x_0, f(x_0))$ Γι αυτό αν ζητάει σημείο της C_f και βρίσκετε πχ $x=2$ τότε θα βρείτε και το $f(2)$ και το σημείο θα είναι $(2, f(2))$

** Αν έχετε 2 σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε η απόσταση του A από το B είναι ίση με: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

** Αν μας λέει ότι η C_f (η γραφική παράσταση της f) είναι εξ ολοκλήρου πάνω από τον άξονα xx' τότε : $f(x)>0$

** Αν μας λέει ότι η C_f είναι εξ ολοκλήρου κάτω από τον άξονα yy' τότε : $f(x)<0$

** Αν μας λέει ότι η C_f τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο x_0 τότε $y=0$ δηλαδή $y=f(x_0)=0$

** Αν μας λέει ότι η C_f τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο y_0 τότε $x=0$ και $y=y_0=f(x_0)$

** Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε $x=0$ και $y=0$

** Αν λέει ότι το σημείο $A(x_1, y_1)$ ανήκει στη C_f τότε πρέπει $f(x_1)=y_1$

** Αν μας λέει ότι η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο x_0 είναι παρ/λη στον άξονα xx' τότε πρέπει $f'(x_0)=0$

** Αν μας λέει ότι η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο x_0 είναι παρ/λη στην ευθεία $y=\lambda x+\beta$ τότε πρέπει $f'(x_0)=\lambda$

** Αν μας λέει ότι η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο x_0 είναι κάθετη στην ευθεία $y=\lambda x+\beta$ τότε πρέπει $f'(x_0)\cdot\lambda=-1$

** ΓΝΩΣΤΕΣ ΓΩΝΙΕΣ ΣΕ ° ΚΑΙ ΣΕ rad ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΤΟΥΣ

ω	$0°$ ή 0	$90°$ ή $\frac{\pi}{2}$	$45°$ ή $\frac{\pi}{4}$	$30°$ ή $\frac{\pi}{6}$	$60°$ ή $\frac{\pi}{3}$
εφω	0	Δεν ορίζεται	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

Για την εύρεση του λ

ΠΡΟΣΟΧΗ !

Αν σας δίνει συνάρτηση f που περιγράφει διάστημα και ζητάει
ΤΑΧΥΤΗΤΑ τότε βρίσκετε την $f'(x)$ αν "
ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ " " " $f''(x)=(f'(x))'$

Μπορεί να το εκφράζει και σαν το ρυθμό μεταβολής π.χ.
ο ρυθμός μεταβολής του διαστήματος = ταχύτητα κινητού
" " " της ταχύτητας = επιτάχυνση κινητού

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - SOS

1. Εστω συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2x^3-9x^2+k$, $k\in\mathbb{R}$. Να βρεθούν:
α. το Π.Ο. της f β. $f'(x)$ γ. Να εξεταστεί η f ως προς την μονοτονία δ. Να βρεθεί η τιμή του $k\in\mathbb{R}$ ώστε το Τ.Μ της f να είναι ίσο με 16 (Τ.Μ.=16) και το (Τ.Ε=-11)
ε. Να δειχθεί ότι η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0=3$ είναι παρ/λη στον άξονα $x'x$.

ΛΥΣΗ

α. Π.Ο $=\mathbb{R}$ (γιατί η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική)

β. $f'(x)=(2x^3-9x^2+k)'=(2x^3)'-(9x^2)'+k'=6x^2-18x$

γ. Θέτω $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 6x^2-18x\geq 0 \Leftrightarrow 6x(x-3)\geq 0$

$x=0$ ή $x=3$ Έχω:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			ΘΕΣΗ Τ.Μ.		ΘΕΣΗ Τ.Ε.		

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0)$
" " " " φθίνουσα " " $(0,3)$
" " " " αύξουσα " " $(3,+\infty)$

Επίσης η f παρουσιάζει Τ.Μ. στο $x_0=0$ και
" " " Τ.Ε στο $x_0=3$ που είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τ.Μ.}=f(0)=2\cdot 0^3-9\cdot 0^2+k=0-0+k=k\\ \text{Επίσης} \quad \text{Τ.Μ.}=16\end{array}\right\}\Rightarrow k=16 \quad \text{και}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τ.Ε}=f(3)=2\cdot 3^3-9\cdot 3^2+k=2\cdot 27-9\cdot 9+k=54-81+k=k-27\\ \text{Επίσης} \quad \text{Τ.Ε.}=-11\end{array}\right\}\Rightarrow k-27=-11 \Leftrightarrow k=-11+27 \Leftrightarrow k=16$$

ε. Ξέρω ότι ο συντελεστής δ/νσης της εφαπτομένης στη C_f στο σημείο με τετμημένη x_0 είναι η $f'(x_0)$ άρα για $x_0=3$ έχω $f'(3)=0$ ($x_0=3$ είναι ρίζα της $f'(x)$ όπως προέκυψε στο γ. ερώτημα) και επομένως η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0=3$ είναι παρ/λη στον xx'

2. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+ax+b$ με $a,b\in\mathbb{R}$
Αν γνωρίζετε οτι η C_f διέρχεται απο το σημείο $A(0,1)$ και η εφαπτόμενη της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$ είναι παρ/λη της ευθείας (ε) με εξίσωση $y=2x+1$ ή κάθετη " " (ε') " " $y=-\frac{1}{2}x+11$ Να βρεθούν
α) ΠΟ β) $\alpha=;$, $b=;$ γ) Να δείξετε οτι για $a=6$ και $b=1$ η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=2$

ΛΥΣΗ

α) $Π.Ο.=\mathbb{R}$ (η f είναι πολυωνυμική)

β) Αφού η C_f διέρχεται απο το σημείο $A(0,1)$ τότε για $x=0 \Rightarrow f(0)=1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ομως } f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0^3-\frac{5}{2}\cdot 0^2+a\cdot 0+b=0-0+0+b=b \\ \text{και } f(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=1}$$

Επίσης έχω οτι η εφαπτόμενη της f στο σημείο $x_0=1$ είναι παρ/λη της (ε) με εξίσωση $y=2x+1$ αρα $\lambda_1=2$ (ο συντελεστής δ/νσης της ε) και $f'(1)$ είναι ο συντελεστής δ/νσης της εφαπτομένης στο $x_0=1$ άρα πρέπει $f'(1)=\lambda_1 \Leftrightarrow f'(1)=2$ (1)

Ομως $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+ax+b\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(\frac{5}{2}x^2\right)'+(ax)'+b'=\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}x^2-\frac{5}{\cancel{2}}\cancel{2}x+a+0 \Rightarrow$

$f'(x)=x^2-5x+a$ και $f'(1)=1^2-5\cdot 1+a=1-5+a=a-4 \Rightarrow$

$f'(1)=a-4$ (2) Απο (1),(2) έχω $a-4=2 \Leftrightarrow \alpha=2+4 \Leftrightarrow \boxed{a=6}$

* αν έχω εξίσωση εφαπτομένης στη C_f κάθετη στην (ε') τότε $\lambda_2=-\frac{1}{2}$
και πρέπει $f'(x_0)\cdot\lambda_2=-1 \Leftrightarrow f'(1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow (a-4)\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow -\frac{(a-4)}{2}=-1$
$\Leftrightarrow \frac{\alpha-4}{2}=1 \Leftrightarrow \alpha-4=1\cdot 2 \Leftrightarrow \alpha-4=2 \Leftrightarrow \alpha=2+4 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=6}$

γ) για $a=6$ και $b=1$ έχω $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+1$ και $f'(x)=x^2-5x+6$
Μελετώ την f ως προς την μονοτονία. Θέτω $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0$
Βρίσκω $\Delta=b^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$ και $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm 1}{2}$ $\nearrow \frac{4}{2}$ $x=2$, $\searrow$ $x=3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			θέση ΤΜ		θέση ΤΕ		

Αρα διαπιστώνεται οτι η f παρουσιάζει για $x_0=2$ Τοπικό Μέγιστο και $f'(2)=2^2-5\cdot 2+6=4-10+6=0$